

Actividad 7

Deducción de los coeficientes de las Series de Fourier Trigonómicas

Nombre _____

Análisis de Señales y Sistemas

Dr. Juan Manuel CAMPOS

Una de las formas en que se presenta la expansión trigonométrica de Fourier de una función periódica $f(t)$ en el intervalo de $-T$ a T es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

y

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Nota que a_0 está dividido por 2 en la fórmula de $f(t)$ (¿por qué?) y que los índices n incluyen el 0 para a_n , mientras que los de b_n comienzan en 1 (¿por qué?). En la sumatoria, tanto los cosenos como los senos siguen índices que empiezan en 1 porque el índice 0 se quedó fuera en a_0 .

La integración tiene como límites $-T$ a T dado que esta vez definimos la periodicidad de la función $f(t)$ en ese rango de valores (anteriormente usamos el rango de 0 a T porque habíamos establecido que la función era periódica en ese rango).

Nota que la longitud del periodo es $2T$. En el argumento del seno y el coseno no aparece $2T$ sino T : ¿por qué?

Deduce las expresiones anteriores realizando lo siguiente:

- 1) Encuentra las expresiones de ortogonalidad entre las funciones armónicas seno y coseno para el periodo $-T$ a T realizando las siguientes integrales y dándosus valores en función de la igualdad o desigualdad de m y n :

$$\int_{-T}^T \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt$$

$$\int_{-T}^T \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt$$

$$\int_{-T}^T \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt$$

- 2) Multiplica por $\sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right)$ la función $f(t)$ y, usando las propiedades del punto 1), intégrala de $-T$ a T para obtener una expresión general para b_n .
- 3) Multiplica por $\cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right)$ la función $f(t)$ y, usando las propiedades del punto 1), intégrala de $-T$ a T para obtener una expresión general para a_n .
- 4) ¿Cuánto es el valor de la expansión en series de Fourier en un punto discontinuo (salto)? (límites por la izquierda y por la derecha distintos)
- 5) ¿En qué consiste el fenómeno de Gibbs en las series de Fourier?
- 6) Obtén una expresión para las frecuencias de las armónicas ω_n y explica el valor de ω_0 (estas frecuencias están en radianes/segundo).